Лекция ПМТК 191124

Рассмотрим уравнение Матье, обобщенное включением слагаемого, отражающего присутствие в системе вязкого трения,

 (10.10)

Ограничимся обсуждением случая малой глубины модуляции и слабой диссипации ( ).

Возникает вопрос: как повлияет на границы области динамической неустойчивости присутствие слабого линейного демпфирования, присущего многим механическим и электромеханическим системам?

***Представление задачи Матье в форме “системы с быстрой фазой”.***

***Простейшая порождающая система. Амплитуды и фазы. Нелинейная замена переменых.***

***Одномерный тор. Расширенное фазовое пространство. Двумерный тор, порождаемый фазой колебаний и временем как базовая конструкция, содержащая решения порождающей системы в расширеном фазовом пространстве.***

***Рациональные и иррациональные частоты колебаний. Соответствующие "обмотки" двумерного тора: замкнутые кривые и кривые, всюду плотно и равномерно заметающие тор.***

Области неустойчивости по Ляпунову решений уравнения Матье называют зонами параметрического резонанса. **Теория мультипликаторов позволила нам установить, что неустойчивость связана с тем, что собственная частота колебаний системы при отсутствии модуляции по крайней мере приблизительно связана с частотой модуляционной накачки**, которая в наших лекциях принималась равной единице, соотношением

 (11.3)

Таким образом, неустойчивую систему Матье, видимо, полезно рассматривать как двухчастотную систему со специально подобранными “резонансными” параметрами. Сотношение (11.3) можно включить в более широкое соотношение рациональной связи

, (11.4)

где k и n взаимно простые натуральные числа, и рассмотреть вопрос, чем выделяются системы с рационально связанными частотами. **Не заключается ли уже в рациональной связи частот одна из причин, вызвавших явление параметрического резонанса?**

Положим в системе (37.17) глубину модуляции  равной нулю. Полученную систему

 (11.5)

называют порождающей.

Решения системы (11.5) на фазовой плоскости  представляют собой эллипсы

 (11.6)

В системе (11.5) проведем нелинейную замену переменных, перейдя в полярную систему координат и изменив масштабы переменных так, чтобы эллипсы на фазовой плоскости превратились в окружности

 (11.7)

В новых переменных система (11.5) примет вид

 (11.8)

Применяя замену того же типа к системе Матье, получим

 (11.9)

Система (11.9) нелинейная и нестационарная (неавтономная) система уравнений. Удобно сделать ее автономной, добавив очевидное уравнение для переменной t

 (11.10)

Тогда при  система (11.9), (11.10) переходит в систему

 (11.11)

и переменная t не уходит из нашего поля зрения.

Пространство переменных  носит название расширенное фазовое пространство системы.

В простейшем случае вращения твердого тела вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью мы считаем, что угловая переменная (фаза)  со временем монотонно растет, наподобие времени, несмотря на то, что фактически она меняется в пределах  и это изменение все время повторяется.

С целью изучения поведений решений системы Матье, наоборот, удобно переменную t рассматривать как еще одну фазу, считая, что , где , а k - число пройденных полных оборотов.

Тогда система уравнений (11.9), (11.10) запишется в виде двухчастотной системы

 (11.12)

а ее порождающая система (11.11) примет вид

 (11.13)

Пространство переменных  также будем называть расширенным фазовым пространством.

Решения системы (11.13) в расширенном фазовом пространстве представляют собой кривые, параметрически заданные уравнениями

 (11.14)

и расположенные на геометрических объектах, называемых торами.

В современной математике геометрические объекты, которые задаются n угловыми координатами

 (11.15)

называют n-мерными торами. Поэтому решения системы (11.14) расположены на двумерных торах (рис.11.5), а решения системы (11.8) представляют собой одномерные торы.

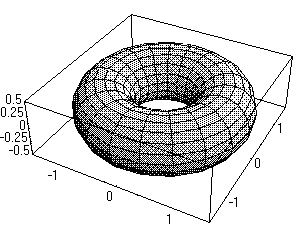


Рис.11.5

Рассмотрим соотношение между частотами - угловыми скоростями, с которыми изменяются решения  и  системы (11.13). Вообще говоря, отношение , те есть безразмерная частота , может быть как рациональным, так и иррациональным числом.

В первом случае решение системы (11.13) будет представлять собой замкнутую кривую. Действительно. Поскольку  то через промежуток времени, равный  изображающая точка, сделав ровно n оборотов по углу  и k оборотов по углу , попадет в ту же точку на торе, из которой она начинала движение. Во втором случае кривая решения никогда не сможет в точности вернуться в начальную точку на торе. Ей не даст это сделать несоизмеримость дуг, пройденных изображающей точкой по по углу  по углу . Кривая решения будет постепенно обматывать тор, всюду плотно заполняя его поверхность. Можно показать, что при этом суммарное время пребывания изображающей точки в различных областях поверхности тора пропорционально доли их площади в площади всей поверхности тора.

***Пространственое и временное среднее. Теорема об усреднении.***

Итак, в случае рационально связанных частот, несмотря на нахождение изображающей точки на поверхности двумерного тора, ее траектория представляет собой одномерный тор, а в случае иррационально связанных частот именно двумерный тор и описывает то геометрическое место, где находится изображающая точка.

Пусть f() некоторая интегрируемая функция, заданная на двумерном торе.

Пространственным средним от функции f() на двумерном торе называется число Mf, которое вычисляется по следующему правилу

 (12.1)

Рассмотрим теперь значения функции f() на решениях системы (11.13) . Это - функция времени f().

Временным средним функции f() на двумерном торе (если оно существует) называется функция , которая находится по следующему правилу

 (12.2)

Имеет место следующая теорема. Временное среднее существует и совпадает с пространственным, если функция f интегрируема, а частоты  и  рационально не связаны (является иррациональным числом).

 (12.3)

Эта теорема называется теоремой об усреднении или эргодической теоремой Г.Вейля.

Для **эргодических систем** [математическое ожидание](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%BE%D0%B5_%D0%BE%D0%B6%D0%B8%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%B8%D0%B5) по [временной переменной](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%92%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D0%BD%D0%BE%D0%B9_%D1%80%D1%8F%D0%B4) должно совпадать с математическим ожиданием по пространственным переменным. То есть для определения параметров системы можно долго наблюдать за поведением одного её элемента, а можно за очень короткое время рассмотреть все её элементы (или достаточно много элементов). Если система обладает свойством эргодичности, то в обоих случаях получатся одинаковые результаты.

Если частоты  и  рационально связаны (является рациональным числом), то кривая решения замкнута на двумерном торе и не заметает весь тор, поэтому интеграл вдоль решения и интеграл по всей поверхности тора могут не совпадать. При этом временное среднее, рассматриваемое как функция , может иметь точки разрыва.

Эргоди́ческая гипо́теза, предположение о том, что для физических величин, характеризующих данную физическую систему, средние значения по времени точно совпадают со средними значениями по соответствующему «[статистическому ансамблю](https://bigenc.ru/c/statisticheskii-ansambl-01fd8f)» (в нашей задаче поверхности двумерного тора) была предложена [Л. Больцманом](https://bigenc.ru/c/bol-tsman-liudvig-d6bafe) в 1887 г. для динамического обоснования статистической физики. Для произвольной физической системы – как классической, так и квантовой – эргодическая гипотеза не доказана. Достаточно строгие доказательства эргодической гипотезы имеются лишь для некоторых физических систем.

Эргодическая гипотеза положила начало [эргодической теории](https://bigenc.ru/c/ergodicheskaia-teoriia-c9affe), изучающей свойства [динамических систем](https://bigenc.ru/c/dinamicheskaia-sistema-sdvigov-603832).

Эргоди́ческая тео́рия - это один из разделов [динамики](https://bigenc.ru/c/dinamika-c3b94d), а именно – исследование замены средних значений, взятых по фазовому пространству, временны́ми средними.

Возможные состояния системы удобно представлять себе как точки [фазового пространства](https://bigenc.ru/c/fazovoe-prostranstvo-v-matematike-b23944), а её эволюцию с течением времени – как некоторое движение ([траекторию](https://bigenc.ru/c/traektoriia-079f31)) в этом пространстве. Различные физические величины, связанные с данной системой, являются, как правило, функциями координат и импульсов, составляющих систему частиц, т.е. функциями точки её фазового пространства. Такие величины называются фазовыми функциями.

При сопоставлении теории с экспериментом приходится сравнивать вычисленные значения тех или иных физических величин с опытными данными. Обычно теоретически легко определяются лишь средние значения фазовых функций по всем состояниям, отвечающим данной энергии (т.н. фазовые средние). С другой стороны, результат всякого измерения представляет собой среднее по времени (т.е. вдоль траектории) от соответствующей фазовой функции. Таким образом, для сравнения опытных данных с теоретическими необходимо обосновать замену временны́х средних фазовыми средними.

Система, в которой фазовые средние совпадают с временны́ми, и называется эргодической. Выяснение условий, при которых система является эргодической, составляет основную задачу эргодической теории.

Полученные в эргодической теории результаты играют важную роль в общей динамике, качественной теории [дифференциальных уравнений](https://bigenc.ru/c/differentsial-noe-uravnenie-7e57fc), теории [случайных процессов](https://bigenc.ru/c/sluchainyi-protsess-ba199d) и в других вопросах.

В более простой формулировке: для эргодической системы среднее по ансамблю элементов системы совпадает со средним по времени. То есть смысл какой: для расчёта/определения параметров системы можно долго-долго смотреть за поведением одного её элемента, а можно за очень короткое время рассмотреть все (ну или достаточно много) её элементов. В обоих случаях получатся одинаковые результаты.

***Медленные и быстрые переменные. Уменьшение размерности торов в зонах параметрического резонанса с помощью замены переменных - введения резонансной (временной) расстройки. Одночастотные колебания в расширенном фазовом пространстве. Критерий устойчивости решения как условие неразрушаемости порождающих торов и близости (неразбегания) фаз.***

Рациональная связь между частотами приводит к изменению числа медленных переменных в рассматриваемой системе.

Действительно. Пусть выполнено условие (11.4). Сделаем замену угловых переменных в системе (11.13) по формуле

 (12.4)

Тогда

 (12.5)

Таким образом, новая переменная , называемая фазовой или резонансной расстройкой в системе (11.13), просто не меняется, и сама система принимает вид

 (12.6)

Введение фазовой расстройки  обеспечивает переход двухчастотной системы (11.13) с одной “медленной переменной”  и двумя “быстрыми”  на двумерном торе в одночастотную систему (12.6) с двумя “медленными переменными”  и одной “быстрой”  на одномерном торе.

Рассмотрим систему уравнений Матье (11.12). При малых  она является “возмущением” порождающей системы (11.13). Ее устойчивость при малой глубине модуляции можно неформально интерпретировать как сохранение близости решений (11.12) к решениям системы (11.13). Во всяком случае, при малых , тор, на котором находятся решения, должен деформироваться слабо. Это означает, что содержащие малый множитель  слагаемые в правых частях системы (11.12) не должны иметь постоянной составляющей.

Если частота  иррациональна, то по теореме об усреднении временное среднее вдоль решения порождающей системы от содержащих малый множитель  слагаемых в правых частях системы (11.12) равно пространственному среднему, которое равно нулю.

 (12.7)

 (12.8)

Если же частота  рациональна и выполнено соотношение (11.4), то прежде всего сделаем замену переменных, введя фазовую расстройку (12.4).

В этом случае получим систему вида

 (12.7)

с двумя медленными переменными  и одной быстрой  на одномерном торе и с порождающей системой (12.6).

Взяв, считая  постоянным, одномерное пространственное среднее по  от содержащих малый параметр  слагаемых правых частей уравнений (12.7), получим

 (12.8)

 (12.9)

Следовательно, при n/k = 2 постоянная составляющая скорости равна нулю, а угловых скоростей  и () равна 0,125 и не равна нулю. Решение системы (12.7) будет систематически уходить от решения порождающей системы (12.6). Но это и есть динамическая неустойчивость. Таким образом, выявляется одно из значений безразмерной собственной частоты системы Матье, при которых возникает параметрический резонанс: .